

ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA

CÁLCULO II

Misceláneas de problemas

2013

Tema: Funciones Vectoriales de una Variable Real.

Hallar el Dominio de las siguientes funciones vectoriales.

1. $\vec{f}(t) = (\frac{t^2}{t+2}, 2t^3, \frac{2t}{t+1})$
2. $\vec{f}(t) = (e^{2t}, e^{-t}, \frac{1}{t})$
3. $\vec{f}(t) = (\frac{1}{t^2}, 0, \ln(t+1))$
4. $\vec{f}(t) = (e^{-t^2}, \ln t^2, t \ln \frac{1}{t})$
5. $\vec{f}(t) = (e^{-t}, t + \sqrt{1-t^2}, \frac{1-\sec^2(t-1)}{(t-1)^2})$
6. $\vec{f}(t) = (\frac{2}{t}, \sqrt{9-t^2})$
7. $\vec{f}(t) = (t+2, \frac{t-1}{t+2}, \frac{3}{t-2})$
8. $\vec{f}(t) = (\sqrt{t-4}, \sqrt{4-t})$
9. $\vec{f}(t) = (\ln(t+1), \sqrt{t^2+2t-8})$
10. $\vec{f}(t) = (\sqrt{2t-t^2}, t, \sqrt{4-2t})$

En los siguientes cuatro ejercicios, calcule: (a) $(\vec{f} + \vec{g})(t)$; (b) $(\vec{f} - \vec{g})(t)$; (c) $(\vec{f} \circ \vec{g})(t)$; (d) $(\vec{f} \times \vec{g})(t)$

11. $\vec{f}(t) = (t+1)i + (t^2-1)j + (t-1)k$; $\vec{g}(t) = (t-1)i + j + (t+1)k$
12. $\vec{f}(t) = (4-t^2)i + 4j - (4-t^2)k$; $\vec{g}(t) = t^2i + (t^2-4)j - 4k$
13. $\vec{f}(t) = (\cos t)i - (\sin t)j + tk$; $\vec{g}(t) = (\sin t)i + (\cos t)j - tk$

14. $\vec{f}(t) = (\sec t)i + (\tan t)j - 2k$; $\vec{g}(t) = (\sec t)i - (\tan t)j + tk$
15. Si $\vec{f}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ donde $a > 0, b > 0$ y $D_f = [0, 2\pi]$. Demuestre que el rango de $\vec{f}$ es una elipse en $\mathbb{R}^2$.
16. Mostrar que la función vectorial $\vec{f}(t) = (t + 2, t^2 + 1)$ tiene por rango una parábola y hacer su gráfico.
17. Si $\vec{f}(t) = (\frac{1-t}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$, describese el rango de $\vec{f}$.
18. Encontrar el rango $\vec{f}$ y graficar.
- a) $\vec{f}(t) = (2 \cos t, \sin t, \frac{t}{4})$
- b) $\vec{f}(t) = (t, t, \sin t)$
19. Mostrar que el rango de la función vectorial $\vec{f}$ definida por $\vec{f}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$ está sobre la esfera de radio 2 y centro en el origen y sobre el cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

En los siguientes problemas, hallar el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones vectoriales.

20. $\vec{f}(t) = (\sqrt{t-2}, \frac{1}{t-2})$
21. $\vec{f}(t) = (\sqrt{4-t}, \sqrt{t-4})$
22. $\vec{f}(t) = (t, (1 - \sqrt{|t|})^2)$
23. $\vec{f}(t) = (t, t, \sin t)$
24. $\vec{f}(t) = (\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t-5}})$
25. ¿Qué curva representa el rango de la función $\vec{f}$?
- a) $\vec{f}(t) = (3 \cos t + 2, 2 \sin t - 3)$
- b) $\vec{f}(t) = (2 + 3 \tan t, 1 + 4 \sec t)$
26. Dadas las funciones siguientes, graficar y hallar el rango.
- a) $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t)$
- b) $\vec{f}(t) = (3 \cosh t, 5 \sinh t)$
- c) $\vec{f}(t) = (t^2, t + 1)$

d) $\vec{f}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

e) $\vec{f}(t) = (\cos t + \operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t)$

27. Defina una función vectorial $\vec{f} : [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de tal manera que su rango sea el triángulo de vértice $P_0(2, -1, 1)$, $P_1(1, 3, -1)$ y $P_2(1, 0, 2)$.

28. Defina una función vectorial del intervalo $[-2, 2]$ en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es el triángulo de vértice $A(3, 2, -1)$, $B(2, 0, 1)$, $C(1, -2, 1)$.

29. Proporcione una función vectorial del intervalo $[0, 1]$ sobre el segmento rectilíneo que une los puntos:

a) $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$

b) P_0 y P_1 en $\mathbb{R}^2$

c) $A(1, 4, 7)$, $B(3, -2, 1)$

30. Identificar y construir la gráfica de $\vec{f}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1 \right)$

31. Identificar y construir la gráfica de $\vec{f}(t) = (t, t^2, t^3)$

32. Calcular el $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t)$ si $\vec{f}(t) = \left(\frac{e^t - e}{t - 1}, \frac{\ln t}{1 - t}, t - 1 \right)$

33. Calcular el límite: $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$ si $\vec{f}(t) = \left(\frac{1 - \cos(3t^2)}{4t^4}, \frac{e^{5t} - 1}{8t}, \frac{t^2 - 4}{t - 2} \right)$

En los siguientes ocho ejercicios, calcule el límite indicado, si existe.

34. $\vec{f}(t) = (t - 2)i + \frac{t^2 - 4}{t - 2}j + tk$; $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{f}(t)$

35. $\vec{f}(t) = \frac{t^2 - 1}{t + 1}i + \frac{t + 1}{t - 1}j + |t + 1|k$; $\lim_{t \rightarrow -1} \vec{f}(t)$

36. $\vec{f}(t) = (\operatorname{sen} t)i + (\cos t)j + \frac{\operatorname{sen} t}{t}k$; $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$

37. $\vec{f}(t) = \frac{1 - \cos t}{t}i + e^t j + e^{-t}k$; $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$

38. $\vec{f}(t) = \frac{|t - 2|}{t - 2}i + \frac{\operatorname{sen} \pi t}{t^2 - 1}j + \frac{\tan \pi t}{t - 1}k$; $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{f}(t)$

$$39. \vec{f}(t) = \frac{1 + \cos t}{1 - \sin t}i + \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \cos t}j + \frac{t^2}{\sin t}k; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$$

$$40. \vec{f}(t) = e^{t+1}i + e^{1-t}j + (1+t)^{1/t}k; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$$

$$41. \vec{f}(t) = \frac{\ln(t+1)}{t}i + (\sinh t)j + (\cosh t)k; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$$

En los siguientes seis ejercicios, determine los números para los que la función vectorial es continua.

$$42. \vec{f}(t) = t^2i + \ln(t-1)j + \frac{1}{t-2}k$$

$$43. \vec{f}(t) = (t-1)i + \frac{1}{e^t-1}j + \frac{|t-1|}{t-1}k$$

$$44. \vec{f}(t) = (\cos t, \sec t, \tan t)$$

$$45. \vec{f}(t) = (\sin \pi t, -\tan \pi t, \cot \pi t)$$

$$46. \vec{f}(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}i + t^2j + k & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$47. \vec{f}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}i + \frac{1 - \cos t}{t}j + \frac{1 - e^t}{t}k & \text{si } t \neq 0 \\ i - k & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

En los siguientes doce ejercicios, dibuje la gráfica de la función vectorial.

$$48. \vec{f}(t) = (t^2, t+1)$$

$$49. \vec{f}(t) = \frac{4}{t^2}i + \frac{4}{t}j$$

$$50. \vec{f}(t) = (t-2)i + (t^2+4)j$$

$$51. \vec{f}(t) = (3 \cosh t)i + (5 \sinh t)j$$

$$52. \vec{f}(t) = (t, 6-4t, 5-2t)$$

$$53. \vec{f}(t) = (t+1, 2t-3, 2t+3)$$

$$54. \vec{f}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$55. \vec{f}(t) = (3 \cos t)i + (3 \sin t)j + 2tk, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

$$56. \vec{f}(t) = (2 \cos t)i + (3 \sin t)j + 4tk, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

$$57. \vec{f}(t) = (4 \cos t, \sin t, t/2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$58. \vec{f}(t) = (3t, 2t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$59. \vec{f}(t) = (t, t^2, \frac{3t^3}{2}), \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$60. \vec{f}(t) = \begin{cases} (2t-1, 2t, \sqrt{-t-1}) & \text{si } t \leq -1 \\ (\frac{2t^2+t-1}{t+1}, -2, 0) & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ (\frac{t^2-t}{t}, -2\frac{\sin t}{t}, \frac{t^2-1}{5}) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

En $t = -1$ y $t = 0$ ¿Es continua la función vectorial $\vec{f}(t)$?

En los siguientes tres ejercicios, demuestre el teorema de límites si $U(t)$ y $V(t)$ son funciones vectoriales tales que $\lim_{t \rightarrow a} U(t)$ y $\lim_{t \rightarrow a} V(t)$ existen.

$$61. \lim_{t \rightarrow a} [U(t) + V(t)] = \lim_{t \rightarrow a} U(t) + \lim_{t \rightarrow a} V(t)$$

$$62. \lim_{t \rightarrow a} [U(t) \circ V(t)] = \lim_{t \rightarrow a} U(t) \circ \lim_{t \rightarrow a} V(t)$$

$$63. \lim_{t \rightarrow a} [U(t) \times V(t)] = \lim_{t \rightarrow a} U(t) \times \lim_{t \rightarrow a} V(t)$$

64. Si f es una función real tal que $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ existe y V es una función vectorial tal que $\lim_{t \rightarrow a} V(t)$ existe, demuestre que :

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t)V(t) = [\lim_{t \rightarrow a} f(t)][\lim_{t \rightarrow a} V(t)]$$

65. Demuestre que si la función vectorial V es continua en un número a , entonces $\|V(t)\|$ es continua en a .